



TITLE:

$\mathfrak{sl}_2$  の有限次元表現  
に付随する  $\mathcal{O}(p,q)$  の  
 $(\mathfrak{g},K)$  加群 (表現論と代  
数、解析、幾何をめぐる諸問題)

AUTHOR(S):

橋本, 隆司

---

CITATION:

橋本, 隆司.  $\mathfrak{sl}_2$  の有限次元表現に付随する  $\mathcal{O}(p,q)$  の  
 $(\mathfrak{g},K)$  加群 (表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題). 数理解析研究所講究  
録 2019, 2103: 1-13

ISSUE DATE:

2019-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251835>

RIGHT:

# $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現に付随する $O(p, q)$ の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群

鳥取大学 教育センター 橋本 隆司

Takashi Hashimoto

Education Center, Tottori University

## Abstract

本稿の主目的は, Howe 双対性の下で  $\mathfrak{sl}_2$  の有限次元表現  $F_m$  ( $\dim F_m = m + 1$ ) に対応する  $O(p, q)$  の既約  $(\mathfrak{g}, K)$  加群を構成し, その  $K$  タイプ公式, および Gelfand-Kirillov 次元, Bernstein 次数を求めることである.

## 1 序

本稿を通して,  $G$  は不定値直交群  $O(p, q)$  を表し, 次のように実現しておく:

$$G = O(p, q) = \{g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}); {}^t g I_{p, q} g = I_{p, q}\}. \quad (1.1)$$

ただし  $I_{p, q} = \begin{bmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{bmatrix}$  とする. したがって  $G$  のリー環を  $\mathfrak{g}_0$  と記すとき

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}); {}^t X I_{p, q} + I_{p, q} X = 0\}$$

となる.  $\mathfrak{g}_0$  の複素化を  $\mathfrak{g}$ , さらに  $\mathfrak{g}_0$  (resp.  $\mathfrak{g}$ ) の双対を  $\mathfrak{g}_0^*$  (resp.  $\mathfrak{g}^*$ ) と記し, 次の  $G$ -不変双一次形式  $B$  により  $\mathfrak{g}_0$  (resp.  $\mathfrak{g}$ ) と同一視する:

$$B(X, Y) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(XY).$$

さて,  $G$  はシンプレクティック・ベクトル空間  $(W, \omega)$ , ただし

$$\begin{aligned} W &= (\mathbb{C}^{p+q})_{\mathbb{R}} = \{z = x + i y; x, y \in \mathbb{R}^{p+q}\}; \\ \omega(z, w) &= \mathrm{Im}(z^* I_{p, q} w) \quad (z, w \in W), \end{aligned}$$

に自然に作用するが, これはハミルトニアン作用, すなわち, 運動量写像  $\mu: W \rightarrow \mathfrak{g}_0^* \simeq \mathfrak{g}_0$  が存在する. この運動量写像  $\mu$  を量子化することにより  $\mathfrak{g}$  の表現が得られるが, この表現は  $(\mathfrak{g}, K)$  加群になることがわかる (ただし  $K$  は,  $O(p) \times O(q)$  に同型な  $G$  の極大コンパクト部分群を表す). 次に, 好一対  $(O(p, q), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$  に着目して, Howe 双対性の下で  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  の有限次元表現  $F_m$  (ただし  $\dim F_m = m + 1$ ) に対応する  $(\mathfrak{g}, K)$  加群  $M^\pm(m)$  を構成する.

この  $M^\pm(m)$  の  $K$  タイプ公式と既約性を調べ, また, それによりこの加群の Gelfand-Kirillov 次元および Bernstein 次数を求めるのが本研究の目的である.

なお, 証明等の詳細については, arXiv:1801.10298 [math.RT] を参照のこと.

以下、本稿で使用する記号を準備する.

リー環  $\mathfrak{g}_0$  の Cartan 分解を  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ , 複素リー環  $\mathfrak{g}$  の複素カルタン分解を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  とする.  $E_{i,j}$  により  $(i,j)$  成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である  $(p+q)$  次の正方行列を表すものとするとき,  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{X_{i,j}^\pm\}$  を

$$X_{i,j}^+ = \begin{bmatrix} A_{i,j} & \\ & \end{bmatrix}, \quad X_{p+i,p+j}^+ = \begin{bmatrix} & \\ & A_{i,j} \end{bmatrix}, \quad X_{i,j}^- = \begin{bmatrix} & E_{i,j} \\ E_{j,i} & \end{bmatrix}$$

とおく. ただし,  $A_{i,j} := E_{i,j} - E_{j,i}$  とおいた. したがって,

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}X_{i,j}^+ \oplus \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}X_{p+i,p+j}^+, \quad \mathfrak{p} = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}X_{i,j}^-$$

である. また, 上昇階乗幂, 下降階乗幂をそれぞれ

$$(\alpha)_n := \prod_{i=1}^n (\alpha + i - 1), \quad (\alpha)_n^- := \prod_{i=1}^n (\alpha - i + 1).$$

とかくことにする.

## 2 運動量写像とその量子化

■運動量写像  $W$  の標準的な基底  $\{e_1, \dots, e_{p+q}, i e_1, \dots, i e_{p+q}\}$  ( $e_i = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 1)$ ) に対し, 同一視

$$e_i \leftrightarrow \partial_{x_i}, \quad i e_i \leftrightarrow \partial_{y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p+q)$$

の下で,  $W$  上のシンプレクティック形式  $\omega$  を微分形式として表すと

$$\omega = \sum_{i=1}^{p+q} \epsilon_i dx_i \wedge dy_i \tag{2.1}$$

となる. ただし,  $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, \dots, p) \\ -1 & (i = p+1, \dots, p+q) \end{cases}$  とおいた. このとき,  $G$  の  $W$  への自然な作用の運動量写像は次のようになる.

**命題 2.1.** 運動量写像  $\mu : W \rightarrow \mathfrak{g}_0^* \simeq \mathfrak{g}_0$  は次式で与えられる :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= -\frac{i}{2}(zz^* - {}^t(zz^*))I_{p,q} \\ &= (-x {}^t y + y {}^t x)I_{p,q} \\ &= \begin{bmatrix} -x' {}^t y' + y' {}^t x' & x' {}^t y'' - y' {}^t x'' \\ -x'' {}^t y' + y'' {}^t x' & x'' {}^t y'' - y'' {}^t x'' \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし  $z = x + i y \in W$ ,  $x = {}^t(x', x'')$ ,  $y = {}^t(y', y'') \in \mathbb{R}^{p+q}$  とする.

■正準量子化  $f \in C^\infty(W)$  に対し,  $W$  上のベクトル場  $\xi_f$  を  $df = \omega(\xi_f, \cdot)$  により定め, Poisson bracket を  $\{f, g\} := \omega(\xi_g, \xi_f)$  と定義する. このとき, (2.1) より各座標関数間の Poisson bracket は以下ようになる:

$$\{x_i, y_j\} = -\epsilon_i \delta_{i,j}, \quad \{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0.$$

$f \in C^\infty(W)$  に対応する量子化を  $\hat{f}$  とかくとき, Dirac の量子化条件の一つである

$$\{f_1, f_2\} = f_3 \quad \text{ならば} \quad [\hat{f}_1, \hat{f}_2] = -i \hat{f}_3 \quad (f_j \in C^\infty(W), j = 1, 2, 3)$$

に則って

$$[\hat{x}_i, \hat{y}_j] = i \epsilon_i \delta_{i,j}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{y}_i, \hat{y}_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, p+q)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= x_i, & \hat{y}_i &= -i \partial_{x_i}, & (i = 1, \dots, p); \\ \hat{x}_{p+j} &= -i \partial_{y_{p+j}}, & \hat{y}_{p+j} &= y_{p+j} & (j = 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

と量子化する. したがって, この量子化は  $W$  のラグランジュ部分空間  $V$  として

$$V = \langle e_1, \dots, e_p, i e_{p+1}, \dots, i e_{p+q} \rangle_{\mathbb{R}} \quad (2.4)$$

を選んだことになる. つまり,  $V$  上の多項式係数の微分作用素のなす環を  $\mathcal{PD}(V)$  とするとき, 量子化された作用素はすべて  $\mathcal{PD}(V)$  の元として実現されている. したがって, (2.2) で与えられる運動量写像  $\mu$  を量子化すれば, すなわち, その中の  $x_i, y_i$  をそれぞれ  $\hat{x}_i, \hat{y}_i$  で置き換えれば, 量子化  $\hat{\mu}$  は次のようになる:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} i(x'^t \partial_{x'} - \partial_{x'}^t x') & x''^t y'' + \partial_{x'}^t \partial_{y''} \\ \partial_{y''}^t \partial_{x'} + y''^t x' & i(y''^t \partial_{y''} - \partial_{y''}^t y'') \end{bmatrix}.$$

ここで

$$\begin{aligned} x' &= {}^t(x_1, \dots, x_p), & \partial_{x'} &= {}^t(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_p}), \\ y'' &= {}^t(y_{p+1}, \dots, y_{p+q}), & \partial_{y''} &= {}^t(\partial_{y_{p+1}}, \dots, \partial_{y_{p+q}}) \end{aligned}$$

とかいた.

■ $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p, q)$  の表現  $\mathfrak{g}$  上で定義した運動量写像  $\mu$  に対し,  $H_X := \langle \mu, X \rangle$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) とおくとき,

$$\{H_X, H_Y\} = H_{[X, Y]}$$

が成り立つことに注意すれば, 次の定理が成り立つ.

定理 2.2.  $\pi(X) := i \langle \hat{\mu}, X \rangle$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) とおけば, 写像  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{PD}(V)$  はリ一環の準同型となる. これを  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{X_{i,j}^\pm\}$  で述べると

$$\pi(X) = \begin{cases} -x_j \partial_{x_i} + x_i \partial_{x_j} & \text{if } X = X_{i,j}^+; \\ -y_{p+j} \partial_{y_{p+i}} + y_{p+i} \partial_{y_{p+j}} & \text{if } X = X_{p+i,p+j}^+; \\ i(x_i y_{p+j} + \partial_{x_i} \partial_{y_{p+j}}) & \text{if } X = X_{i,j}^-; \end{cases}$$

となる.

■正準量子化その2 上と同一のラグランジュ部分空間  $V$  に対応する正準量子化として

$$\begin{aligned} \hat{x}_i^\# &= x_i, & \hat{y}_i^\# &= -i \partial_{x_i}, & (i = 1, \dots, p); \\ \hat{x}_{p+j}^\# &= y_{p+j}, & \hat{y}_{p+j}^\# &= i \partial_{y_{p+j}} & (j = 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (2.5)$$

とする. これらもすべて  $\mathcal{PD}(V)$  の元として実現されていることに注意. これに対応する量子化された運動量写像  $\hat{\mu}^\#$  は

$$\hat{\mu}^\# = i \begin{bmatrix} x'^t \partial_{x'} - \partial_{x'}^t x' & x'^t \partial_{y''} + \partial_{x'}^t y'' \\ y''^t \partial_{x'} + \partial_{y''}^t x' & y''^t \partial_{y''} - \partial_{y''}^t y'' \end{bmatrix}$$

となる. 定理 2.2 と同様,  $\pi^\#(X) = i \langle \hat{\mu}^\#, X \rangle$  とおけば

$$\pi^\#(X) = \begin{cases} -x_j \partial_{x_i} + x_i \partial_{x_j} & \text{if } X = X_{i,j}^+; \\ -y_{p+j} \partial_{y_{p+i}} + y_{p+i} \partial_{y_{p+j}} & \text{if } X = X_{p+i,p+j}^+; \\ -(x_i \partial_{y_{p+j}} + y_{p+j} \partial_{x_i}) & \text{if } X = X_{i,j}^-; \end{cases} \quad (2.6)$$

となり, これは [2] で与えられた  $\mathfrak{g}$  の表現に一致する.

■いくつかの注意

注意 2.3. (1)  $\hat{x}_{p+j}^\#$  および  $\hat{y}_{p+j}^\#$  は, 次のように  $\hat{x}_{p+j}$  および  $\hat{y}_{p+j}$  に対応している:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{p+j} &= -i \partial_{y_{p+j}} & \longleftrightarrow & & \hat{x}_{p+j}^\# &= y_{p+j} \\ \hat{y}_{p+j} &= y_{p+j} & \longleftrightarrow & & \hat{y}_{p+j}^\# &= i \partial_{y_{p+j}} \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, q).$$

これは  $y_{p+1}, \dots, y_{p+q}$  に関する部分的フーリエ変換 (partial Fourier transform) に他ならない. つまり, 我々の表現  $\pi$  は  $\pi^\#$  とこの部分的フーリエ変換により関係している.

(2) 対応  ${}^t(x', i y'') \leftrightarrow {}^t(x', y'')$  の下で  $V$  を  $\mathbb{R}^{p+q}$  と同一視することにより,  $G$  を  $V$  に作用させるとき, (2.6) で与えられる  $\pi^\#$  は,  $C^\infty(V)$  上の  $G$  の正則表現の微分表現に一致する. したがって, 特に,  $\pi|_{\mathfrak{k}} = \pi^\#|_{\mathfrak{k}}$  であることから,  $\pi|_{\mathfrak{k}}$  は  $K$  の表現に持ち上がる.

### 3 好一对 ( $O(p, q), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ )

■好一对 ( $O(p, q), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ) これより以降,  $\mathfrak{g}$  の表現としては  $\pi$  のみを考え, また, 記号を簡単にするため,

$$x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_p), \quad y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_q)$$

とかくことにする.

さて, よく知られているように,  $(O(p, q), \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R}))$  は  $\mathrm{Sp}(m(p+q), \mathbb{R})$  において好一对をなすが,  $m=1$  として好一对 ( $O(p, q), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ) を得る. そこで, いささか天下りではあるが,

$$H = -E_x - \frac{p}{2} + E_y + \frac{q}{2}, \quad X^+ = -\frac{1}{2}(\Delta_x + r_y^2), \quad X^- = \frac{1}{2}(r_x^2 + \Delta_y)$$

とおく. ただし,

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{i=1}^p x_i \partial_{x_i}, & r_x^2 &= \sum_{i=1}^p x_i^2, & \Delta_x &= \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}^2, \\ E_y &= \sum_{j=1}^q y_j \partial_{y_j}, & r_y^2 &= \sum_{j=1}^q y_j^2, & \Delta_y &= \sum_{j=1}^q \partial_{y_j}^2. \end{aligned}$$

このとき, 簡単な計算により, 次の命題が成り立つことを確かめることができる.

**命題 3.1.**  $\mathfrak{g}' := \mathbb{C}\text{-span}\{H, X^+, X^-\} \subset \mathcal{PD}(V)$  とおけば,  $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}_2$  である. さらに  $\mathfrak{g}' \subset \mathcal{PD}(V)^{\mathfrak{g}}$  が成り立つ. ただし,  $\mathcal{PD}(V)^{\mathfrak{g}} := \{D \in \mathcal{PD}(V); D\pi(X) = \pi(X)D \ (X \in \mathfrak{g})\}$  とする.

■最高ウェイトベクトルと最低ウェイトベクトル  $\mathfrak{g}$  の作用と可換な  $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}_2$  の作用がわかったので, 次に,  $\mathfrak{g}'$  の作用に関する最高ウェイトベクトル (または最低ウェイトベクトル), すなわち, ある複素数  $\lambda$  に対して

$$Hf = \lambda f \quad \text{かつ} \quad X^+f = 0 \quad (\text{または } X^-f = 0) \tag{3.1}$$

を満たす  $V$  上の関数を求めよう.

今,  $\mathbb{R}^n$  上の斉次  $d$  次の調和多項式を  $\mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n)$  とかくことにすると, これが  $O(n)$  の既約表現になっていることはよく知られている. さらに  $V$  上の多項式全体のなす空間  $\mathcal{P}(V)$  は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(V) &\simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p] \otimes \mathbb{C}[y_1, \dots, y_q] \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathbb{C}[r_x^2] \otimes \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p)) \otimes \bigoplus_{l=0}^{\infty} (\mathbb{C}[r_y^2] \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)) \\ &\simeq \bigoplus_{k,l=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{C}[r_x^2, r_y^2] \end{aligned}$$

であることに注意して, (3.1) を満たす最高ウェイトベクトル (または最低ウェイトベクトル)  $f$  を  $\mathcal{P}(V)$  の中で探してみるとうまくいかないことがわかる. そこで, 今,  $f$  が

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)\phi(r_x^2, r_y^2)$$

の形をしていると仮定する. ただし

$$h_1 \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q), \phi(s, t) \in \mathbb{C}[[s, t]]$$

とする. つまり, 次の関数空間  $\tilde{\mathcal{E}}$  の中で探すことにする:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigoplus_{k, l=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{C}[[r_x^2, r_y^2]].$$

このとき, 微分方程式 (3.1) を解けば, 次の命題を得る.

**命題 3.2.**  $h_1 \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p)$ ,  $h_2 \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$  が与えられたとき,  $(\kappa_+ := k + p/2, \kappa_- := l + q/2)$ .

(1)  $f = h_1(x)h_2(y)\phi(r_x^2, r_y^2)$  が  $Hf = \lambda f$  および  $X^+f = 0$  を満たすならば,  $f$  は

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)r_y^{2\mu_-}\psi_{\kappa_+}$$

で与えられる. ただし  $\mu_- = (\lambda + \kappa_+ - \kappa_-)/2 \in \mathbb{N}$ .

(2)  $f = h_1(x)h_2(y)\phi(r_x^2, r_y^2)$  が  $Hf = \lambda f$  および  $X^-f = 0$  を満たすならば,  $f$  は

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)r_x^{2\mu_+}\psi_{\kappa_-}$$

で与えられる. ただし  $\mu_+ = -(\lambda + \kappa_+ - \kappa_-)/2 \in \mathbb{N}$ .

ここで  $\psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\alpha)_n} \left(\frac{r_x^2 r_y^2}{4}\right)^n$  とおいた.

### ■いくつかの注意 (2)

注意 3.3. (1) 上の命題 3.2 で現れた関数

$$\psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\alpha)_n} \left(\frac{r_x^2 r_y^2}{4}\right)^n$$

は, 第 1 種の  $\nu$  次ベッセル関数  $J_\nu$

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

を用いて表すことができる. 実際,

$$\psi_\alpha = \Gamma(\alpha) \left(\frac{r_x r_y}{2}\right)^{-(\alpha-1)} J_{\alpha-1}(r_x r_y)$$

という関係が成り立つ。よく知られているように、 $J_\nu$  はベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 J_\nu}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dJ_\nu}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) J_\nu = 0$$

を満たすが、これを  $\psi_\alpha$  の言葉に翻訳すれば

$$\frac{r_x^2 r_y^2}{4} \psi_{\alpha+2} = \alpha(\alpha+1)(\psi_{\alpha+1} - \psi_\alpha) \quad (3.2)$$

となる。(3.2) は、以下で見るように、いくつかの場面で鍵となる役割を果たす。

(2) 補題 2.3 に述べたように、二つの表現  $\pi$  と  $\pi^\#$  の間には

$$\begin{array}{ccc} \pi & & \pi^\# \\ -i\partial_{y_j} & \longleftrightarrow & y_j \\ y_j & \longleftrightarrow & i\partial_{y_j} \end{array} \quad (j = 1, \dots, q)$$

のような関係がある。この対応の下で、 $\mathfrak{g}'$  の表現作用素  $H$  および  $X^+$  はそれぞれ、定数倍を除いて、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{p,q} &= \sum_{i=1}^p x_i \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^q y_j \partial_{y_j} + \frac{p-q}{2}, \\ \square_{p,q} &= \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}^2 - \sum_{j=1}^q \partial_{y_j}^2 \end{aligned}$$

に対応する。したがって、(3.1) を満たす最高ウェイトベクトル  $f$  は、微分方程式

$$\square_{p,q} \tilde{f} = 0$$

の斉次解  $\tilde{f}$  に対応する。

命題 3.2 から、 $\tilde{\mathcal{E}}$  の元である最高ウェイトベクトル（または最低ウェイトベクトル） $f$  は、その  $K$  タイプが決まれば、 $r_y^2$  (または  $r_x^2$ ) の冪とベッセル関数の次数は一意的に定まることかわかる。

■  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}_2$  と  $\mathfrak{p}$  の  $\mathcal{E}$  への作用 本節の最後に、 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}_2$  と、 $X \in \mathfrak{p}$  に対して  $\pi(X)$  の  $\mathcal{E}$  への作用を掲げておこう。

$\rho_x = r_x^2/2, \rho_y = r_y^2/2$  とおけば表示が簡単になるので、以下、そうする。また、これまでの議論から、我々の関数は、とりあえず、以下の (3.3) で与えられる関数空間  $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}$  に棲んでいるものとする：

$$\mathcal{E} := \mathbb{C}\text{-span} \left\{ h_1(x) h_2(y) \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha ; \begin{array}{l} h_1 \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^q), \\ a, b \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$



命題 3.4.  $h_1 = h_1(x) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 = h_2(y) \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$  ( $\kappa_+ = k + p/2, \kappa_- = l + q/2$ ) に対し,

$$\begin{aligned} H(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= (-\kappa_+ + \kappa_- - 2a + 2b) h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha, \\ X^+(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= h_1 h_2 \left( -a(\kappa_+ + a - 1) \rho_x^{a-1} \rho_y^b \psi_\alpha + \frac{\kappa_+ + 2a - \alpha}{\alpha} \rho_x^a \rho_y^{b+1} \psi_{\alpha+1} \right), \\ X^-(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= h_1 h_2 \left( b(\kappa_- + b - 1) \rho_x^a \rho_y^{b-1} \psi_\alpha - \frac{\kappa_- + 2b - \alpha}{\alpha} \rho_x^{a+1} \rho_y^b \psi_{\alpha+1} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

が成り立つ。したがって,  $\mathfrak{sl}_2$  の作用は  $\mathcal{E}$  の各元の  $K$  タイプを保つ。

さらに,  $\mathbb{R}^n$  上の次数  $d$  の斉次多項式関数  $P$  に対し

$$P^\dagger := P - \frac{r^2}{4(d + n/2 - 2)} \Delta P$$

とかくことにする (ただし,  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ )。このとき,  $\Delta^2 P = 0$  ならば  $\Delta P^\dagger = 0$ , つまり,  $P^\dagger \in \mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n)$  となることに注意。

命題 3.5.  $h_1 = h_1(x) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 = h_2(y) \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$  ( $\kappa_+ = k + p/2, \kappa_- = l + q/2$ ) に対し,

$$\begin{aligned} -i \pi (X_{i,j}^-)(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= (\partial_{x_i} h_1)(\partial_{y_j} h_2) \rho_x^a \rho_y^b \left( \frac{(\kappa_+ + a - \alpha)(\kappa_- + b - \alpha)}{(\kappa_+ - 1)(\kappa_- - 1)} \psi_\alpha + \frac{(\alpha - 1)(\kappa_+ + \kappa_- + a + b - \alpha - 1)}{(\kappa_+ - 1)(\kappa_- - 1)} \psi_{\alpha-1} \right) \\ &\quad + (\partial_{x_i} h_1)(y_j h_2)^\dagger \left( -\frac{\kappa_+ + a + b - \alpha}{\alpha(\kappa_+ - 1)} \rho_x^{a+1} \rho_y^b \psi_{\alpha+1} + \frac{b(\kappa_+ + a - 1)}{\kappa_+ - 1} \rho_x^a \rho_y^{b-1} \psi_\alpha \right) \\ &\quad + (x_i h_1)^\dagger (\partial_{y_j} h_2) \left( -\frac{\kappa_- + a + b - \alpha}{\alpha(\kappa_- - 1)} \rho_x^a \rho_y^{b+1} \psi_{\alpha+1} + \frac{a(\kappa_- + b - 1)}{\kappa_- - 1} \rho_x^{a-1} \rho_y^b \psi_\alpha \right) \\ &\quad + (x_i h_1)^\dagger (y_j h_2)^\dagger \left( -\frac{a+b+1-\alpha}{\alpha} \rho_x^a \rho_y^b \psi_{\alpha+1} + ab \rho_x^{a-1} \rho_y^{b-1} \psi_\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

が成り立つ。

いずれの命題 3.4 および 3.5 の証明においても (3.2) が鍵となる。

## 4 主結果

■  $\mathfrak{sl}_2$  の有限次元表現に付随する  $(\mathfrak{g}, K)$  加群  $\mathfrak{sl}_2$  の表現論により, 非負整数  $m \in \mathbb{N}$  に対し,  $Hf = \lambda f, X^\pm f = 0, (X^\mp)^{m+1} f = 0$  ならば  $\lambda = \pm m$  であることから, 以下のような対象を導入する。

定義 4.1 (cf. [5]). 与えられた非負整数  $m \in \mathbb{N}$  に対し,

$$\begin{aligned} M^+(m) &:= \left\{ f \in \mathcal{E}; \begin{array}{l} Hf = m f, \quad X^+ f = 0 \\ (X^-)^j f \neq 0 \ (1 \leq j \leq m), \ (X^-)^{m+1} f = 0 \end{array} \right\}, \\ M^-(m) &:= \left\{ f \in \mathcal{E}; \begin{array}{l} Hf = -m f, \quad X^- f = 0 \\ (X^+)^j f \neq 0 \ (1 \leq j \leq m), \ (X^+)^{m+1} f = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と定義する.

定義により  $M^+(0) = M^-(0)$  であるが, さらに  $M^+(m)$  と  $M^-(m)$  について次が成り立つ.

**命題 4.2.**  $M^+(m)$  と  $M^-(m)$  は互いに同型な  $(\mathfrak{g}, K)$  加群である.

実際,  $(X^+)^m(X^-)^m v = (m!)^2 v$  ( $v \in M^+(m)$ ) であるから,

$$(X^-)^m : M^+(m) \xrightarrow{\sim} M^-(m).$$

が同型を与える.

■  **$K$  タイプ公式** 次に本研究の主結果を述べる.

**定理 4.3.** 正整数  $p$  と  $q$  のパリティが同一 (すなわち  $p+q \in 2\mathbb{N}$ ) とし, 非負整数  $m \in \mathbb{N}$  が  $m+3 \leq (p+q)/2$  を満たすと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(1)  $M^\pm(m)$  の  $K$  タイプ公式は

$$M^\pm(m)|_K \simeq \bigoplus_{\substack{k, l \geq 0 \\ k-l + \frac{p-q}{2} \in \Lambda_m}} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q),$$

で与えられる. ただし  $\Lambda_m = \{-m, -m+2, -m+4, \dots, m-2, m\}$  とする.

(2) さらに  $p, q \geq 2$  ならば,  $M^\pm(m)$  は既約である.

命題 3.2 より,  $m \in \mathbb{N}$  に対し,  $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{k+p/2} \in M^+(m)$  (または  $f = h_1 h_2 \rho_x^{\mu_+} \psi_{l+q/2} \in M^-(m)$ ) ならば

$$\pm m = -k + l - \frac{p-q}{2} \pm 2\mu_{\mp} \in \mathbb{Z}$$

なので,  $f \neq 0$  ならば  $(p+q)/2 \in \mathbb{Z}$  でなければならないことに注意する.

また, 定理より,  $M^+(0) = M^-(0)$  は  $O(p, q)$  の極小表現に対応することがわかる (cf. [1, 4, 3]).

証明には次の補題を用いる.

**補題 4.4.**  $h_1 = h_1(x) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p)$  および  $h_2 = h_2(y) \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$  ( $\kappa_+ = k + p/2$ ,  $\kappa_- = l + q/2$ ) とする.

(1)  $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+}$  が最高ウェイトベクトルで, ウェイトが  $\lambda = -\kappa_+ + \kappa_- + 2\mu_-$  ならば

$$(X^-)^v f = h_1 h_2 \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{(-\lambda + v - 1)_i^- (\mu_-)_{v-i}^- (\kappa_- + \mu_- - 1)_{v-i}^-}{(\kappa_+)_i} \rho_x^i \rho_y^{\mu_- - v + i} \psi_{\kappa_+ + i}.$$

(2)  $f = h_1 h_2 \rho_x^{\mu_+} \psi_{\kappa_-}$  が最低ウェイトベクトルで, ウェイトが  $\lambda = -\kappa_+ + \kappa_- - 2\mu_+$  ならば

$$(X^+)^v f = (-1)^v h_1 h_2 \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{(\lambda + v - 1)_i^- (\mu_+)_{v-i}^- (\kappa_+ + \mu_+ - 1)_{v-i}^-}{(\kappa_-)_i} \rho_x^{\mu_+ - v + i} \rho_y^i \psi_{\kappa_- + i}.$$

ただし,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  で,  $\binom{\nu}{i}$  は二項係数を表す.

証明は, 命題 3.4 を  $a = 0$  または  $b = 0$  の場合に適用して  $\nu$  に関する帰納法を用いる.

定理の証明 (概略) (1)  $M^+(m)$  について示す.  $M^-(m)$  についても全く同様である. 補題より  $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+} \in M^+(m)$  ( $\kappa_+ = k + p/2$ ,  $\kappa_- = l + q/2$ ) に対し,

$$\begin{aligned} (X^-)^{m+1} f &= h_1 h_2 \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \frac{(0)_i^- (\mu_-)_{m+1-i}^- (\kappa_- + \mu_- - 1)_{m+1-i}^-}{(\kappa_+)_i} \rho_x^i \rho_y^{\mu_- - m - 1 + i} \psi_{\kappa_+ + i} \\ &= (\mu_-)_{m+1}^- (\kappa_- + \mu_- - 1)_{m+1}^- h_1 h_2 \rho_y^{\mu_- - m - 1} \psi_{\kappa_+}. \end{aligned}$$

したがって,  $(X^-)^{m+1} f = 0$  のとき

$$\begin{aligned} \mu_- &= 0, 1, \dots, m, \quad \text{or} \\ \mu_- &= -\kappa_- + 1, -\kappa_- + 2, \dots, -\kappa_- + m + 1 \end{aligned}$$

となるが,  $p, q, m$  に関する仮定から後者は除外される. したがって  $m = -\kappa_+ + \kappa_- + 2\mu_-$  より

$$\kappa_+ - \kappa_- = -m + 2\mu_- = -m, -m + 2, \dots, m$$

を得る.

(2) 命題 3.5 より,  $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+}$  ( $\kappa_+ = k + p/2$ ,  $\kappa_- = l + q/2$ ) に対し,

$$\begin{aligned} -i \pi (X_{i,j}^-) f &= \frac{\kappa_- + \mu_- - 1}{\kappa_- - 1} (\partial_{x_i} h_1) (\partial_{y_j} h_2) \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+ - 1} \\ &\quad + \mu_- (\partial_{x_i} h_1) (y_j h_2)^\dagger \rho_y^{\mu_- - 1} \psi_{\kappa_+ - 1} \\ &\quad + \frac{\kappa_+ - \mu_- - \kappa_-}{\kappa_+ (\kappa_- - 1)} (x_i h_1)^\dagger (\partial_{y_j} h_2) \rho_y^{\mu_- + 1} \psi_{\kappa_+ + 1} \\ &\quad + \frac{\kappa_+ - \mu_- - 1}{\kappa_+} (x_i h_1)^\dagger (y_j h_2)^\dagger \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+ + 1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

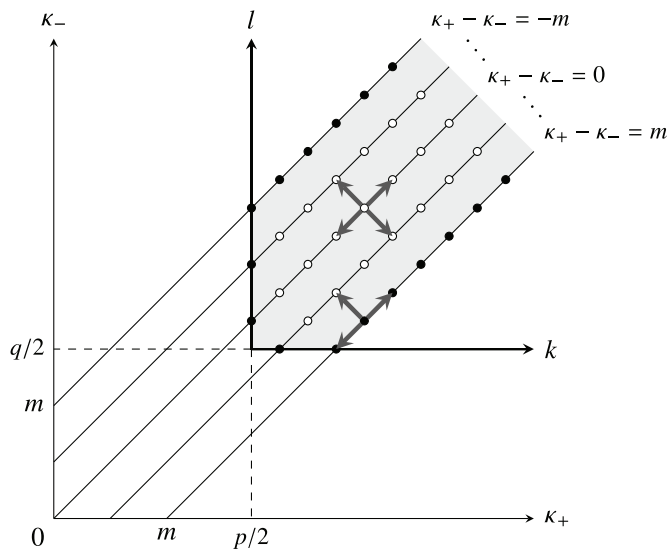
となるが, (4.1) の右辺の各項の係数を調べると, 任意に  $K$  タイプを決めたとき, そこからそれに隣合うすべての  $K$  タイプに移れることがわかる (図 1 を参照).  $\square$

■ Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数 有限生成  $U(\mathfrak{g})$  加群  $M$  に対し, その Gelfand-Kirillov 次元, Bernstein 次数をそれぞれ  $\text{Dim } M, \text{Deg } M$  と記すことにする.

系 4.5.  $p, q \geq 3$ ,  $p + q \in 2\mathbb{N}$ ,  $m + 3 \leq (p + q)/2$  ならば

$$\begin{aligned} \text{Dim } M^\pm(m) &= p + q - 3, \\ \text{Deg } M^\pm(m) &= \frac{4(m+1)(p+q-4)!}{(p-2)!(q-2)!} \end{aligned}$$

である.



白丸 (o), 黒丸 (•) ともに  $K$  タイプを表す. 白黒の別は, 単に, 内部にあるか境界上にあるかを区別している. 白丸からは北東 (↗), 北西 (↖), 南東 (↘), 南西 (↙) のいずれの方向にも進める. 一方, 黒丸からは, 4 つの方向のうち, 内部または境界上にあるドットにしか進めない.

図 1

系より

$$\text{Deg } M^\pm(m) = (m+1) \text{Deg } M^\pm(0)$$

となる.

証明  $p \geq q$  と仮定してもよい. まず

$$\dim \mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n) = \binom{d+n-1}{n-1} - \binom{d+n-3}{n-1}$$

であることを思い出そう.

いま,  $M_0$  を

$$M_0 := \bigoplus_{\substack{(\kappa_+, \kappa_-) \in \Sigma_m \\ \kappa_+ + \kappa_- \leq c}} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q) \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+} \quad (4.2)$$

と選ぶ. ただし,  $c = \max\{m+p, m+q\}$  であり,  $\mu_-$  は  $\mu_- = (\kappa_+ - \kappa_- + m)/2$  により決まる.

次に、いつものように  $M_n := U_n(\mathfrak{g})M_0$  ( $M_{-1} := 0$ ) とおけば、

$$\begin{aligned} \dim(M_n/M_{n-1}) &= \sum_{j=0}^m \dim(\mathcal{H}^{n+j}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^{n+m-j+\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^q)) \\ &= \frac{4(m+1)}{(p-2)!(q-2)!} n^{p+q-4} + (\text{lower order terms in } n) \\ &= \frac{4(m+1)(p+q-4)!}{(p-2)!(q-2)!} \frac{n^{p+q-4}}{(p+q-4)!} + \cdots \end{aligned}$$

となる（図 2 を参照）。これから直ちに系が従う。 □

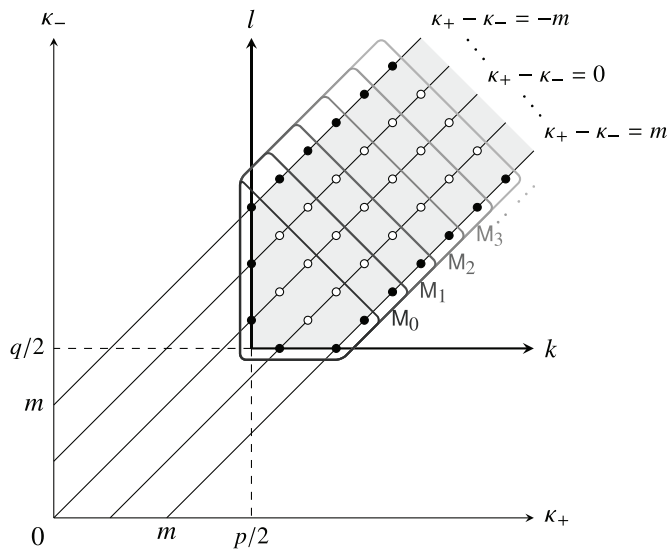


図 2

## Acknowledgements

本研究は科研費（課題番号 23540203, 26400014）の助成を受けて行われました。

## 参考文献

[1] B. Binetgar and R. Zierau, *Unitarization of a singular representation of  $SO(p, q)$* , Comm. Math. Phys. **138** (1991), no. 2, 245–258. MR 1108044

- [2] Roger E. Howe and Eng-Chye Tan, *Homogeneous functions on light cones: the infinitesimal structure of some degenerate principal series representations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **28** (1993), no. 1, 1–74. MR 1172839 (93j:22027)
- [3] T. Kobayashi and G. Mano, *The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group  $O(p, q)$* , Memoirs of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, 2011.
- [4] Toshiyuki Kobayashi and Bent Ørsted, *Analysis on the minimal representation of  $O(p, q)$ . I, II, III*, Adv. Math. **180** (2003), no. 2, 486–512, 513–550, 551–595. MR 2020550 (2004k:22018a)
- [5] Stephen Rallis and Gérard Schiffmann, *Weil representation. I. Intertwining distributions and discrete spectrum*, Mem. Amer. Math. Soc. **25** (1980), no. 231, iii+203. MR 567800 (81j:22007)

Takashi Hashimoto

University Education Center, Tottori University,

4-101, Koyama-Minami, Tottori, 680-8550, JAPAN.

e-mail: thashi@tottori-u.ac.jp